गणित क्यों और कैसे ?

हृदय कान्त दीवान

इस लेख में गणित विषय पर हृदय कान्त दीवान से हुई शिक्षकों की बातचीत को प्रस्तुत किया गया है। गणित सीखने-सिखाने से सम्बन्धित शिक्षकों के गहरे और माक़ूल सवाल, यथा– गणित से डर क्यों लगता है, गणित में मूर्त और अमूर्त को कैसे समझें, गणित में ठोस वस्तुओं का उपयोग कहाँ करें, आदि पर विस्तार से बातचीत है। सं.

आज की बातचीत का विषय है– गणित क्यों और कैसे? कुछ सवाल साझा किए गए थे, मैं उनसे ही शुरू करता हूँ।

पहला सवाल था, गणित से डर क्यों लगता है? इसके कुछ कारण समझ में आते हैं। एक कारण जो अकसर कहा भी जाता है और कुछ हद तक सही भी है वह यह, कि गणित एक अमूर्त विषय है, ये ज़िन्दगी में उस तरह से नहीं आता है जिस तरह बाक़ी विषय आते हैं। इसके कक्षाई स्वरूप और जो स्वरूप ज़िन्दगी में दिखता है इन दोनों में बहुत फ़र्क़ है और इसलिए गणित मुश्किल लगता है। दो और कारण हैं और ये एक दूसरे से जुड़े भी हैं। पहला कारण, गणित इसलिए भी मुश्किल है क्योंकि इसे प्रतिष्ठा का विषय माना जाता है, और जिस तरह से ये पढ़ाया जाता है उस वजह से भी यह बहुत मुश्किल हो जाता है। साथ ही पढ़ाने वाले और पूरा समाज ये मानता है कि गणित मुश्किल है, इस वजह से बच्चों को पहले से ही लगने लगता है कि यह मुश्किल है। इस डर के माहौल के कारण शुरू से ही हम ये समझने लग जाते हैं कि इस विषय से डर-डर कर चलना है। इस पहले से मौजूद डर के चलते सीखने और सिखाने की प्रक्रिया स्वाभाविक नहीं हो पाती है। मूलतौर पर यही होता है कि किसी तरह से ये याद कर ले, सवालों का हल सीख ले ताकि परीक्षा में पास हो जाए। गणित के बारे में ये धारणाएँ, (पहला) ये मुश्किल है; और (दूसरा) ये स्वाभाविक जीवन से जुड़ा हुआ नहीं है, दोनों ही शायद सही नहीं हैं।

इस प्रश्न पर विचार करें कि तीन या चार साल का बच्चा गणित में क्या-क्या जानता है। ध्यान से सोचने और देखने पर पाते हैं कि इस उम्र के बच्चे को गणित में बहुत कुछ आता है। जैसे उसको पता है कि उसके पास ज़्यादा है या किसी और के पास ज़्यादा है, और ये ज़्यादा सिर्फ़ गिनती में नहीं, आकार, वज़न में भी हो सकता है। उसको इन सबका अन्दाज़ा है कि चीज़ों में तुलना के लिए इनका आकार, वज़न देख सकते हैं और उनको गिन सकते हैं। हालाँकि, अगर कुछ उलझे हुए प्रश्न पूछे जाएँ और ऐसे सवाल बनाए जाएँ जो सीधे-सीधे न हों, तो हो सकता है वह भ्रमित हो जाए। जैसे पियाजे ने दिखाया कि वह संरक्षण में उलझ जाता है लेकिन सहज विकास के स्तर में देखें तो स्वाभाविक तौर पर सात साल का बच्चा संरक्षण कर पाता है। चार साल के बच्चे को अगर कहा जाए कि तुम ये चीज़ उठा लाओ और वो चीज़ ऐसी हो जो उसकी पहुँच के बाहर भी हो, तो भी बच्चा वो चीज़ याद करके, उसका रास्ता याद

करके और उस रास्ते तक कैसे पहुँचना है, यह तय करके वहाँ पहुँच जाता है। यदि वह चीज़ कुछ ऊँचाई पर हो तो वहाँ तक कैसे पहुँचना है, इसके लिए जो भी आसपास उपलब्ध है उसको इस्तेमाल करके वह कोशिश करता है कि उस चीज़ तक पहुँच जाए जहाँ उसे जाना है। ये नहीं कह सकते कि चार साल के छोटे बच्चे के पास जगह की समझ नहीं है। ऐसे बहुत-से और उदाहरण भी मिलते हैं। उसे थोड़ा बहुत गिनना आता है, जोड़ना, घटाना आता है और जगह की समझ भी है। वो आकार समझता है। यह भी कि वो चीज़ों को श्रेणियों में बाँटकर गिन-गिन कर बता सकता है कि इसमें कितनी चीज़ें हैं, फलाँ वस्तु कितनी हैं और फलाँ कितनी, और दोनों कुल मिलाकर कितने हैं। माने एक शुरुआती स्तर पर डाटा को सॉर्ट (sort) करके चीज़ों को अलग-अलग श्रेणियों (categories) में रखना भी उसे आता है। अगर वो क्रिकेट या फुटबॉल का शौक़ीन है तो वो ऐसे आँकड़े भी जानता है कि कितने मैच हुए, किसने कितने मैच जीते और जीतने पर किसको कितने अंक मिलते हैं तो कुल कितने अंक हो गए। कुल मिलाकर वह आँकड़ों के प्रबन्धन के प्रपंच सीखना शुरू कर चुका होता है और इसका प्रमाण भी वह देता रहता है। उसे गणित में क्या-क्या आता है, यह समझना बहुत ज़रूरी है।

गणित सीखने के लिए तार्किक सम्बन्ध बहुत ज़रूरी हैं, और ऐसे तार्किक सम्बन्ध जो आगे सिद्ध करने तक ले जाते हैं, उस तरह के तार्किक सम्बन्ध भी वो बनाने लगता है। हालाँकि, अभी संख्याओं और आकृतियों के सम्बन्ध में इतने तार्किक सम्बन्ध नहीं बना पाता, लेकिन जिन मूल चीज़ों, परिस्थितियों से वो रूबरू होता है उसमें तार्किक सम्बन्ध बनाने लगता है। इस तरह गणित की बहुत सारी शुरुआती समझ स्कूल आने से पहले ही बन जाती है।



चित्र : प्रशान्त सोनी

अगर कोई बच्चा ऐसे घर में रहता है जहाँ दुकान चलती है तो उसे उस दुकान का पूरा गणित; कौन-सी चीज़ कितने की आती है, और उस चीज़ का वज़न के हिसाब से कितना दाम होगा, यह सब वह जानता है। इसमें फिर दो बातें छिपी हैं, एक आसपास गणित है जिससे बच्चा या इंसान ख़ुद-ब-ख़ुद रूबरू होता है और सीखता रहता है। दूसरी बात यह कि गणित सीखने की प्रक्रिया एक तरह से स्वाभाविक परिस्थितियों में उपलब्ध है, और बच्चा उन स्वाभाविक परिस्थितियों में जो करने की ज़रूरत है उसको करते हुए सीखता रहता है। इसके मायने यह हैं कि गणित का डर नैसर्गिक डर नहीं है।

एक और सवाल था कि क्या कुछ जानवर जिनको थोड़ी बहुत गिनती या मात्रा का एहसास हो जाता है वे गणित जानते हैं, ऐसा कह सकते हैं? जैसे ज़्यादा या कम दुश्मन सामने हैं, दुश्मन कम ताक़तवर है या ज़्यादा, क्या मधुमक्खी फूलों तक पहुँचने का रास्ता जानती है और रास्ते तक पहुँच सकती है? इन जीवों की क्षमता इंसानी क्षमता से फ़र्क़ है और इस बारे में काफ़ी शोध हुए है कि कौन-सा जीव क्या और कहाँ तक सीख सकता है। चिम्पेंजी कहाँ तक गिनती

सीख सकता है और भाषा के कितने शब्द सीख सकता है। इन सबसे यह साफ़ है कि इंसान के बच्चों में चीज़ों को सीखने की क्षमता बहुत अधिक है। इंसान का विकास एक सामाजिक जीव के रूप में हुआ है और उसने साथ रहकर और सहकार से एक दूसरे को अपनी बात समझाने की आवश्यकता के चलते जिस तरह से जीना सीखा है और जिस तरह से उसका उद्विकासी विकास (evolutionary development) हुआ है, उसकी वजह से उसमें ऐसी क्षमताएँ अन्तर्निहित हैं जिनमें ये सब सीखने की सम्भावना बन जाती है। इंसानी ज्ञान की लगातार प्रगति होती रहती है, बढ़ता हुआ यह ज्ञान हम एक दूसरे से भी बाँटते हैं और अगली पीढ़ी को भी देते जाते हैं। माने इंसानी ज्ञान, इंसान की ज्ञान को संचित और हस्तान्तरित करने की क्षमता के कारण बढ़ता जा रहा है। यह समझना बहुत महत्त्वपूर्ण है कि इंसान के पास, ज्ञान साझा करने की, एक दूसरे के साथ मिलकर काम करने की अन्तर्निहित क्षमता है। साथ काम करने में एक दूसरे को समझना, एक दूसरे की समझ को समझना और उसपर टिप्पणी करना पड़ती है क्योंकि व्यक्ति को ख़ुद तय करना है कि कौन-सा तरीक़ा ज़्यादा कारगर होगा। यह सब व्यक्ति को अपनी समझ और सोच को लगातार बनाने के मौक़े प्रस्तुत करते हैं। इन सभी ज्ञान के प्रकारों में गणित का ज्ञान भी है। जैसे-जैसे आवश्यकता पड़ी है लोगों ने साथ काम किया है, वैसे-वैसे गणित का विकास भी और ज़्यादा होता गया। मान लीजिए आपने एक इमारत बनाने के लिए कोई तरीक़ा सोचा, उस तरीक़े को आपको दूसरों को समझाना है कि ये चीज़ ऐसे बनती है, इसके लिए इतनी ज़मीन और सामग्री चाहिए होगी, इमारत का आकार, कैसे बनना चाहिए, इन सबके लिए निर्देश लिखने की ज़रूरत है ताकि और लोग भी उसे बना सकें। इन निर्देशों से शायद यह ज़रूरत महसूस हुई कि उस आकार और माप को कुछ नाम दिया जा सके। भारत में गणित के विकास में बहुत सारी ऐसी बातें इस वजह से हुईं क्योंकि कई तरह की इमारतें बनाई गईं। उन इमारतों को बनाने और सामग्रियों के इस्तेमाल के लिए नियम बनाए गए। यह इमारतें कई तरह की थीं, अलग-अलग आर्थिक व सामाजिक स्तर के लोगों के रहने के लिए, कारीगरों के कार्य के लिए, अलग-अलग ढंग के पूजा-स्थलों व मूर्तियों की स्थापना के लिए, वग़ैरह। हर इमारत में हवा, रोशनी, मज़बूती, साइज़ व अन्य आवश्यकताओं के लिए कुछ बुनियादी उसूल लागू करने की ज़रूरत होती थी और आज भी रहती है। यह काम सुरक्षित व उचित ढंग से हो पाए, इसके लिए कई बातें अनुभव से सीखी गईं जो ख़ुद को अगली रचना के लिए व अन्य को हिदायत देने के लिए आवश्यक थीं। इन्हें ऐसा व्यक्त करना ज़रूरी था कि बहुत-सी बातें संक्षेप में ही कही जा सकें। अतः इसके लिए सूत्र बनाए गए और उन सूत्रों के समझने व समझाने के लिए कुछ और ऐसी रचनाएँ कीं जिन्हें याद रखना सम्भव था। इसमें बहुत सारी ऐसी चीज़ें थीं जिनके कारण गणित ज़रूरी हो गया।

> इंसान का विकास एक सामाजिक जीव के रूप में हुआ है और उसने साथ रहकर और सहकार से एक दूसरे को अपनी बात समझाने की आवश्यकता के चलते जिस तरह से जीना सीखा है और जिस तरह से उसका उद्विकासी विकास (evolutionary development) हुआ है, उसकी वजह से उसमें ऐसी क्षमताएँ अन्तर्निहित हैं जिनमें ये सब सीखने की सम्भावना बन जाती है।

यहाँ से आगे भी लोगों ने सोचा तो कई नई बातें, नियम और प्रमेय निकलकर आईं। इसी तरह तारों की गणनाओं से भी बहुत-सी गणित की शुरुआत हुई क्योंकि उसमें पूर्वानुमान करना था कि कौन-सा तारा, ग्रह कब और कहाँ होगा? कलन (calculus) का विकास इस वजह से हुआ क्योंकि ये जानना था कि किसी चीज़ के परिवर्तन की दर क्या है? परिवर्तन

की दर को समेकित करके पूरा कितना हुआ, इसको जोड़ने के लिए समाकलन की ज़रूरत पड़ी। गणित का विकास इसपर भी निर्भर करता है कि ज़रूरत किस क़िस्म की है, और उस ज़रूरत के लिए क्या करना पड़ेगा। यानी गणित ज़रूरत से संचालित होता है, यह भी कह सकते हैं। दूसरी ओर, ये संगीत की तरह भी बनता है क्योंकि इसमें भी एक तरह का मज़ा है। जैसे लोग नई-नई धुन और नए-नए राग बनाते हैं, नए-नए सुरों को एक साथ जोड़ते हैं, उसी तरह से गणित में भी लोग नए-नए गणितीय ऑब्जेक्टों (जैसे काल्पनिक संख्याएँ, नए-नए बीजीय व्यंजक) सोचते हैं, उन ऑब्जेक्टों के आपस में सम्बन्ध ढूँढ़ते हैं, उन सम्बन्धों से कुछ नया बनाते हैं। वे काफ़ी सारी गणितीय रचनाएँ करते हैं, जो अपने-आप में उन लोगों को बहुत मज़ेदार लगती हैं जो उससे जूझ पाते हैं। लेकिन गणित और संगीत दोनों में ही सामान्य गणित और सामान्य संगीत से आगे बढ़ने के लिए और कोई नई चीज़ गढ़ने के लिए काफ़ी बुनियादी तैयारी की ज़रूरत होती है। संगीत में किसी के द्वारा पहले गाए हुए गीत को दोबारा गा देना काफ़ी नहीं है। अगर नया गीत गाना है तो बुनियादी सुरों में नए सम्बन्ध ढूँढ़कर कुछ नया बनाना पड़ेगा और संगीतज्ञ एवं गायक यही करते हैं। इसी तरह से गणितज्ञ भी पहले से उपलब्ध प्रमेयों के आधार पर ऑब्जेक्टों के बीच सम्बन्ध ढूँढ़ते हैं, ऑब्जेक्टों को नई परिस्थिति में लागू करने का प्रयास करते हैं जिससे नई चीज़ें सामने आती हैं। तो गणित का एक गुण यह है कि गणित खोजबीन और उठापटक की चीज़ भी है और यह उठापटक व खोजबीन हमें नया गणित भी देती है एवं हमारी गणितीय क्षमता को बढ़ाती भी है। इसमें खोजबीन को सीखने वाले की गणितीय समझ, उसकी गणितीय ऑब्जेक्टों की जानकारी के अन्तर्गत ही रचित किया जाए तो सीखने वाले को नया खोजने में मज़ा भी आता है और सीखना रोचक भी बन जाता है।



चित्र : प्रशान्त सोनी

अभी तक की बातचीत के मुख्य बिन्दु संक्षिप्त में रखें तो गणित इंसानी ज्ञान का एक हिस्सा है। इस ज्ञान के हिस्से के ख़ास गुण ये हैं कि ये अमूर्त ऑब्जेक्टों का इस्तेमाल करता है और उन अमूर्त ऑब्जेक्टों, नियमों के साथ नई रचनाएँ बनाता है और कोशिश करता है कि उन रचनाओं से कोई नई चीज़ बन सके। इसका एक मुख्य उद्देश्य, जिस वजह से इसकी शुरुआत भी हुई, यह था कि इंसानी जीवन में हम कुछ बेहतर कर सकें, ऐसे कुछ आकार बना सकें जो ज़्यादा टिकाऊ (stable), ज़्यादा मज़बूत हों, या फिर ऐसे कुछ आकार सोच सकें जिनमें ज़्यादा-से-ज़्यादा चीज़ आ सके और फिर हम ऐसे आकार बना सकें जो संचालन में मदद कर सकें। आम जीवन को बेहतर बनाने का हमारा तकनीकी और विज्ञान के माध्यम से

जो प्रयास रहा है उसमें गणित की एक प्रमुख भूमिका रही है जो उतनी उजागर नहीं है। दूसरा परिमाण (quantity) की कल्पना के लिए गणित संख्या का ढाँचा देता है जो इंसानी विकास के लिए बहुत ज़रूरी है। इसलिए यह कहना, कि गणित अमूर्त है, एक हद तक ही सही है क्योंकि उसका उपयोग काफ़ी मूर्त है और हमें हर समय दिखता है। इसकी प्रकृति की ख़ासियत ये भी है कि इसमें प्रामाणिक ज्ञान मानने का आधार न तो मापन है, न ही किसी व्यक्ति की राय। बल्कि वो ऐसी तार्किक संरचनाएँ हैं जो उस चीज़ को आपको सिद्ध करके दिखा सकती हैं। आप कुछ मान्यताओं, कुछ ऑब्जेक्टों को लेकर चलते हैं फिर इन सबको मिलाकर आप तार्किक रचनाएँ करते हैं वो मुख्यतौर पर गणित को रचती हैं और इन रचनाओं को करने के दौरान आप लगातार नए ऑब्जेक्टों भी बनाते हैं और उन ऑब्जेक्टों के बीच सम्बन्ध भी ढूँढ़ते हैं। कई बार आप इन ऑब्जेक्टों को नए गुण भी दे देते हैं जिससे कि आप उसको और ज़्यादा व्यापक कर सकें।

ये ऑब्जेक्ट, इनकी परिभाषाएँ और इनपर सोचे गए नियम, एक हद तक मनमाने (arbitrary) ही मिलेंगे। जैसे कि, भाषा में शब्दों का चुनाव arbitrary है कि किसी चीज़ को टेबल क्यों कहते हैं, कुछ और क्यों नहीं कह देते हैं। वैसे ही इसमें भी संख्या के नाम उस संख्या के साथ जुड़े नहीं हैं लेकिन हमने वो नाम दिए हैं।

यह तर्क किया जाता है कि पूर्णांक क्या है और पूर्णांक में ज़ीरो जोड़ते हैं, प्राकृतिक संख्याओं में ज़ीरो नहीं जोड़ते हैं, पूर्ण संख्याओं में ज़ीरो जोड़ते हैं, ये क्यों करते हैं? 3/2 को भी क्यों भिन्नात्मक संख्या मानते हैं? भिन्नात्मक संख्याओं को उचित भिन्नात्मक संख्याओं तक ही क्यों नहीं रखते हैं। या ये क्यों कहते हैं कि '1' विषम संख्या तो है लेकिन वो अभाज्य / रूढ़ संख्या नहीं है, क्योंकि रूढ़ संख्याओं की परिभाषा कहती है कि वह एक ऐसी संख्या है जिसके सिर्फ़ दो ही गुणनखण्ड होते हैं। ये सब दर्शाता है कि ये चुनाव हमने अपने ढंग से गणित रचने के लिए किया है। इसको अलग ढंग से परिभाषित करने पर अलग रचना बनेगी। गणित में कुछ तार्किक नियम हैं। ये तार्किक नियम आपने सहज बुद्धि से लिए हैं, जैसे–A यदि B से बड़ा है और B, C से बड़ा है तो A, C से बड़ा होगा। इसी मान्यता के आधार पर आप पूरा-का-पूरा गणित रचते हैं। अगर इस मान्यता को लेकर नहीं चलेंगे तो जो गणित बनेगा वो बिलकुल अलग बनेगा, और ये बात, कि अगर A, B के बराबर है और B, C के बराबर है तो A, C के बराबर होगा, भी गणित के लिए बुनियादी मान्यता है, इसको नहीं मानेंगे तो गणित बहुत आगे नहीं बढ़ सकता। कुल मिलाकर गणित कुछ ऑब्जेक्टों, नियमों और कुछ बनाए गए सिद्धान्तों के आधार पर आगे चलता है और इन सभी चीज़ों के आधार पर नए-नए तार्किक सम्बन्ध और तार्किक रचनाएँ बनाता रहता है और इसका इस्तेमाल हम हर जगह करते हैं।

> सवाल है कि गणित क्यों सिखाएँ ? गणित इसलिए सिखाएँ क्योंकि ये हमारे दिमाग़ को तीव्र करता है, तार्किक ढंग से सोचने के लिए तैयार करता है और हमारी गणितीय क्षमता का विकास करता है जिसमें जगह की, संख्याओं और तार्किक सम्बन्धों की बेहतर समझ शामिल है।

अगला सवाल है कि गणित क्यों सिखाएँ? गणित इसलिए सिखाएँ क्योंकि ये हमारे दिमाग़ को तीव्र करता है, तार्किक ढंग से सोचने के लिए तैयार करता है और हमारी गणितीय क्षमता का विकास करता है जिसमें जगह, संख्याओं और तार्किक सम्बन्धों की बेहतर समझ शामिल है। इस बेहतर समझ के चलते जब हम ज़िन्दगी में व्यवहार करेंगे, अपने आम जीवन में व्यवहार करेंगे तो उससे हमारी निर्णय लेने की क्षमता

या किसी परिस्थिति को विश्लेषित करने की क्षमता बढ़ जाएगी। जैसे– मान लीजिए आपको डाटा हैण्डलिंग (data handling) की, सम्भाव्यता की समझ है तो आप लॉटरी पर पैसा नहीं लगाएँगे। आप कहीं भी जाकर जुआ नहीं खेलेंगे क्योंकि आपको ये समझ आ जाएगा कि जो जुआ खिलवा रहा है उसको पता है लगभग 80–90 फ़ीसदी लोग हारेंगे, और अगर आप एक–दो बार जीत भी जाते हैं तो अन्ततः तय है कि आपको हारना है। आप बाज़ार में हो रहे परिवर्तनों और उनके पैटर्न को समझ सकते हैं कि कब किसी चीज़ को बेचना है, कब रखना है। दुकान है तो कौन–सा सामान कब मँगवाना है, कितना मँगवाना है, ये सब दुकानदार करते हैं लेकिन आप अगर बेहतर गणित जानते और उसको इस्तेमाल करते हैं तो आप ज़्यादा बेहतर कर सकते हैं। महत्त्वपूर्ण बात जो सोचने की है, वह यह कि क्या हमारी गणित की कक्षाओं



चित्र : प्रशान्त सोनी

में उस गणित के उपयोग की सम्भावना बनती है जो बच्चों के जीवन में है। क्योंकि गणित में रुचि बनाने का एक बहुत महत्त्वपूर्ण रास्ता ये हो सकता है कि बच्चों और माता–पिता को लगे कि ये हमारे काम की चीज़ है। बच्चे माता–पिता के साथ, समाज में अन्य लोगों के साथ उसपर चर्चा कर पाएँ, क्योंकि जब तक चर्चा नहीं करेंगे उन्हें दोबारा अभ्यास का मौक़ा नहीं मिलेगा। ये मौक़ा नहीं मिलेगा कि जो ज्ञान स्कूल में सीखा है उसको दोहरा सकें, उसके नए आयाम खोज सकें और उसके लिए नए अभ्यास बना सकें। कई किताबें और *राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा, 2005* भी कहती है कि गणित सीखने के लिए ज़रूरी है कि बच्चे ख़ुद सवाल बनाएँ, ख़ुद सोचें कि कैसे वो उन सवालों को हल कर सकते हैं जो उन्होंने पहले नहीं किए हैं।

दूसरी बात यह कि घर पर बच्चों के साथ गणित में कैसे काम कर सकते हैं? पहला यह कि गणित को हौवा नहीं बनाना चाहिए और उसको किताब व कॉपी से बाहर निकालकर आसपास के जीवन में देखना चाहिए। यह देखना चाहिए कि बच्चा गणित को एक खोजबीन का विषय माने और यह देख पाए कि कैसे कुछ रोचक कार्य उससे किए जा सकते हैं। रामानुजन और हार्डी की कहानी आपने सुनी होगी जिसमें रामानुजन ने गाड़ी के नम्बर को देखकर एक ऐसी बात बताई जो उसके लिए अजूबा थी। रामानुजन ऐसा इसलिए कर पाया क्योंकि वो लगातार संख्याओं से खेलता था, वो यह देखने की कोशिश करता था कि संख्याओं का वर्ग करें

या उनको जोड़ें या उनको घन में बनाएँ और उनको जोड़ें या घटाएँ, उनका पूरा घन देखें तो उससे क्या संख्याएँ बनती हैं और इसी से वो कई नए पैटर्न देख पाया।

आकृतियों में भी बहुत-से पैटर्न देख सकते हैं। टैनग्राम (tangram) से विभिन्न आकृतियाँ बनानी चाहिए। उनमें एक जैसे टैनग्राम को जोड़कर वापस वर्ग बनाना तो है ही, पर उसके अलावा भी बहुत सारी चीज़ें की जा सकती हैं, जैसे– नई-नई आकृतियाँ बनाना और उनको अलग-अलग ढंग से रख कर उनका अध्ययन करना जिससे यह देखा जा सके कि जीवन में ऐसी आकृतियाँ कहाँ-कहाँ मिलती हैं। इनपर काम करते हुए ये भी देख पाएँगे कि एक त्रिभुज को घुमा-फिरा कर रखने से उस त्रिभुज का आकार भी अलग प्रतीत होता है। यह भी कि सिर्फ़ समकोण त्रिभुज या समद्विबाहु या समबाहु त्रिभुज ही हो ऐसा नहीं है, बल्कि ऐसे भी त्रिभुज होते हैं जिनकी तीनों भुजाएँ अलग-अलग हों और उसके सभी कोण न्यूनकोण हों। यह भी देख सकते हैं कि कितनी तरह के त्रिभुज बनाए जा सकते हैं, त्रिभुज को अलग-अलग ढंग से घुमाने (rotate) पर वह कैसा दिखता है उससे आप अपने आसपास की जगह में आकृतियों को पहचानने में सक्षम बन सकते हैं। तीन से अधिक भुजाओं वाली आकृतियों, जैसे चौकोन और बहुभुज (polygon) को लेकर भी ऐसा किया जा सकता है। अकसर वर्ग को एक ही तरह से दर्शाया जाता है। लेकिन वर्ग को किसी भी कोने पर दिखाएँगे तो वो वैसा सीधा नहीं दिखेगा, उसको 45 डिग्री पर घुमाने पर दो सिरे ऊपर-नीचे आ जाएँगे और दो सिरे क्षैतिज (horizontal) आ जाएँगे, तब वर्ग, सामान्य वर्ग से बहुत अलग दिखेगा। एक गणित की खोजबीन और उसमें लगातार परिवर्तन करके देखते रहना और दूसरा उसको ज़िन्दगी में ढूँढ़ते रहना। ज़िन्दगी में ढूँढ़ते रहने के हर घर में अलग-अलग तरह के उदाहरण हो सकते हैं और बच्चे को ऐसे टास्क (task) दिए जा सकते हैं कि वो स्कूल में सीखी गई गणित का इस्तेमाल कर सके। जब वो ऐसा करना शुरू करेगा तो अपने गणित के ज्ञान से वह उस टास्क को भी बेहतर कर सकेगा। गणित में रुचि विकसित करना गणित को खोजबीन का माध्यम, डर रहित और घर में इस्तेमाल करने से ही सबसे ज़्यादा हो सकता है। यहाँ स्कूल और घर दोनों को एक साथ सोचना पड़ेगा कि गणित को बच्चे के सामने किस तरह से प्रस्तुत किया जाए या कक्षा प्रक्रियाएँ किस तरह की हों जिनसे बच्चों के पास ऐसे टास्क हों जो वे घर जाकर कर सकें। गणित सिखाना मूलतौर पर सार्थक होना चाहिए, बच्चे के जीवन से जुड़ा होना चाहिए, ऐसा होना चाहिए जिसमें उसको कुछ करने का मौक़ा हो, जिसमें वो कुछ नया कर सके और उसका कुछ योगदान हो सके। सिर्फ़ उन सवालों को करते रहना, निकालते रहना जिनका उत्तर किसी को मालूम है, उस उत्तर को नहीं पाने पर डाँट खाना, यह सब गणित के प्रति रुचि पैदा करने का बेहतर साधन नहीं है। गणित में रुचि पैदा करना है तो उसमें मज़ा लेने के लिए सिखाने की ऐसी परिस्थितियाँ लाज़मी होंगी जो खुली हों, जिसमें बच्चा नए सवाल बनाए, जो वो जानता है उसको नई परिस्थितियों में इस्तेमाल करे और ख़ुद रास्ते तय करे कि आगे क्या किया जाना चाहिए।

अगर गणित में रुचि पैदा करना है तो उसमें मज़ा लेने के लिए सिखाने की ऐसी परिस्थितियाँ लाज़मी होंगी जो खुली हों, जिसमें बच्चा नए सवाल बनाए, जो वो जानता है उसको नई परिस्थितियों में इस्तेमाल करे और ख़ुद रास्ते तय करे कि आगे क्या किया जाना चाहिए।

दो-तीन और मसले हैं। एक बहुत बड़ा भ्रम मूर्तता और अमूर्तता के बारे में है। पिछले 20

सालों में ऐसा माना जाने लगा है कि बिना वस्तुओं के गणित सिखा ही नहीं सकते। अगर वस्तु इस्तेमाल कर दी, खेल करवा दिए तो इसका मतलब है कि बच्चा गणित सीख गया। कई तरह की गणितीय प्रयोगशालाओं, मॉडल की बात होती है। कोणों के लिए, भिन्नात्मक संख्याओं, आकारों, और पाइथोगोरस प्रमेय को सिद्ध करने के लिए मॉडल बना सकते हैं। और



चित्र : प्रशान्त सोनी

इन मॉडल की मदद से बच्चे को मूर्त से अमूर्त की तरफ़ ले जा सकते हैं। लेकिन अमूर्त की ओर ले जाने का अर्थ क्या है? अमूर्त है क्या? 5 अमूर्त है या मूर्त, सातवीं कक्षा के बच्चे के लिए 9/11 को 20 लिखना मूर्त है या अमूर्त, क्योंकि इस सवाल पर विचार नहीं करेंगे तो फिर आप पहली कक्षा में बच्चों को उस तरह की मूर्त चीज़ों के बारे में ही उलझाते रहेंगे जो उनको पता हैं और वो उससे बहुत ज़्यादा कर सकते हैं। ऐसा करके आप लगातार बच्चे की क्षमता को कम आँक रहे हैं और इस वजह से कक्षा में उसे ऐसा महसूस होता है कि शायद उसको कुछ नहीं आता। चार-पाँच साल के बच्चे जो घर में नौ, दस तक अच्छी तरह गिन सकते हैं, पूरा हिसाब-किताब कर सकते हैं उनको हम एक से नौ तक गिनना सिखाते हैं। ये बात सही है कि उनको अंक लिखना नहीं आता, लेकिन नौ तक जोड़ना-घटाना सब आता है। प्रश्न ये है कि पहली कक्षा में एक चीज़ देना, फिर दो का समूह दिखाना, फिर तीन का और कई बार ये इस तरीक़े से भी किया जाता है कि बच्चे को पहले और एक में व दो और दूसरे में भ्रम हो जाता है। एक समूह का मान है और एक क्रम है (cardinal और ordinal) उसमें भी बच्चा उलझने लगता है। सबसे महत्त्वपूर्ण बात यह समझने की है कि गणित के ऑब्जेक्ट अन्ततोगत्वा अमूर्त हैं और हमें बच्चे को अमूर्तता की ओर ले जाना है यह स्पष्टता होनी ज़रूरी है, नहीं तो हम उसको मूर्त में ही उलझाने की कोशिश करते रहेंगे।

मूर्त का इस्तेमाल तब ही करना चाहिए जब बच्चा बग़ैर मूर्त के अमूर्त तक जाने में असक्षम हो। उस अमूर्तता से और आगे बढ़ने के लिए अगर किसी मूर्त मॉडल की ज़रूरत है तो वो विकसित किया जाए। वो मूर्त मॉडल ऐसा होना चाहिए जो बहुत जल्दी हटा दिया जाए, जिससे उसपर निर्भरता न बने। इकाई, दहाई का उदाहरण लेते हैं। इसमें मूर्त मॉडल भी लेते हैं और चित्र का मॉडल भी। बच्चों को बताते हैं कि एक लाइन वाली कॉपी में इस खाने के ऊपर इकाई, इसके ऊपर दहाई और इस

तीसरे खाने पर सैकड़ा लिख लो। फिर बच्चों को सवाल देते हैं, उनको समझाते हैं कि पहले इसको जोड़ो, फिर इसको। अगर कोई बच्चा लिखी गई इकाई, दहाई को अनदेखा कर पूरी संख्याओं को जोड़कर बता देता है तो ये कहा जाता है आपको स्तम्भवार ही जोड़ना चाहिए, नहीं तो आप ग़लती कर जाएँगे। कुल मिलाकर आप बच्चे को ये समझा रहे हैं कि ये जो संख्या है, तीन टुकड़ों में बँटी है, और इन तीनों टुकड़ों का एक स्वतंत्र अस्तित्व है।

ये एक तरह से बच्चे को पंगु बना रहे हैं कि वो स्वतंत्र रूप से संख्याओं के बारे में सोच न सके, दो संख्याओं के बारे में मौखिक जोड़ न कर सके और गणित में नए सिद्धान्तों तक और नए संख्या ढाँचों तक पहुँचने में सक्षम न हो सके क्योंकि उसके बाद द्विआधारी (binary) और अष्टकोणीय प्रणाली (octagonal system) या हैक्साडेसिमल सिस्टम (hexadecimal system) समझना बहुत मुश्किल हो जाता है क्योंकि वो डेसिमल सिस्टम (decimal system) में ही उलझकर रह जाता है। फिर बच्चे जब भिन्नात्मक संख्याओं में आते हैं और उनसे 1/2 को 3/5 से जोड़ने को कहते हैं या 3/2 से 3/4 या 7/4 को जोड़ने को कहते हैं तो बच्चे उन स्तम्भों को जोड़कर अलग-अलग लिख देते हैं क्योंकि उनको लगता है कि जब भी संख्याएँ स्तम्भों में लिखी जाती हैं तो उसका मतलब होता है दो अलग-अलग स्तम्भ को जोड़ना है, और अगर उनको ये नियम याद रह जाता है तो कई बार हासिल जोड़ देते हैं, नहीं याद रहता तो वे हर स्तम्भ का जोड़ अलग-अलग लिख देते हैं। ये बिलकुल ही ग़ैर-ज़रूरी मॉडल है।

यदि बच्चे को दो अंक की संख्याओं को समझने की शुरुआत में दिक़्क़त आ रही है तो शायद मूर्त रूप से दिखाने की ज़रूरत हो, लेकिन ज़्यादा समय उसपर लगाने से बच्चे को संख्याओं को पूरी संख्या के रूप में समझने की जो क्षमता आनी चाहिए उसमें ही वो आगे नहीं बढ़ पाता। हम बच्चे के संज्ञानात्मक स्तर को नहीं समझते और बहुत जल्दी ही चाहते हैं कि बच्चा तीन और चार अंक की संख्याओं तक पहुँच जाए। कितनी बड़ी संख्या के साथ काम करना चाहिए, ये इस बात से तय होना चाहिए कि वो कितनी बड़ी संख्या को समझ सकता है। तीन अंक हों, चार हों या पाँच, ये महत्त्वपूर्ण नहीं है, महत्त्वपूर्ण यह है कि वो कुल संख्या का एहसास कर पाए, उसको सोच पाए या ये सोच पाए कि जितना भी बड़ी-से-बड़ी संख्या में सोचूँगा उससे बड़ी संख्या क्या होगी, या क्या इतनी बड़ी संख्या होती है जितनी मैंने अभी देखी ही नहीं है। ख़ास बात यह है कि गणित का अर्थ उन अवधारणाओं को समझना और उनमें सक्षमता हासिल करना है जिनसे कि आप नई चीज़ बना सकें, न कि ज्ञात बातों को याद रखना और ज्ञात मॉडलों को दोहराना। बच्चों को नए मॉडल बनाना आना चाहिए और उसका उपयोग कर पाना चाहिए। अभी मौजूदा मॉडल, व्याख्याएँ लगातार उनके ऊपर थोपने की कोशिश रहती है जिससे बच्चे के पास दोहरा काम हो जाता है। एक आपके बनाए मॉडल को अपनी दृष्टि से सोचकर समझना और फिर उसको उस अवधारणा से जोड़कर देखना जिस अवधारणा को वो समझने की कोशिश कर रहा है और फिर इन दोनों को जोड़कर अपनी समझ बना पाना। गणित में मॉडल का इस्तेमाल, चाहे वो किसी भी अवधारणा के लिए हो, या तो अपर्याप्त है या भ्रामक, या उसकी शुद्धता कई बार ग़लत है।

गणित का अर्थ उन अवधारणाओं को समझना और उनमें सक्षमता हासिल करना है जिनसे कि आप नई चीज़ बना सकें, न कि ज्ञात बातों को याद रखना और ज्ञात मॉडलों को दोहराना। बच्चों को नए मॉडल बनाना आना चाहिए और उसका उपयोग कर पाना चाहिए। अभी मौजूदा मॉडल, व्याख्याएँ लगातार उनके ऊपर थोपने की कोशिश रहती है जिससे बच्चे के पास दोहरा काम हो जाता है।

गणित में मूर्त से अमूर्त का मतलब क्या है? सातवीं कक्षा के विद्यार्थी के लिए दो संख्याओं का जोड़ मूर्त है। जिस भी सवाल का उत्तर एक संख्या के रूप में आता है, वो उसके लिए मूर्त है। जैसे ही उससे ऐसे सवालों की बात करते हैं जिनमें उत्तर एक निश्चित संख्या नहीं है बल्कि बहुत सारी संख्याएँ हो सकती हैं जिसको हमें एक बदलती संख्या के रूप में किसी चर संख्या के साथ दर्शाना पड़ेगा वो उसके लिए अमूर्त होगा। माने उसके लिए जोड़ना, घटाना, गुणा, भाग, समीकरण जो कि संख्याओं से संचालित है, इबारती सवाल, सब मूर्त हैं, लेकिन जैसे ही एक परिवर्तनशील उत्तर सामने आया तो उसके लिए एक अमूर्तता का स्तर दोबारा शुरू होगा। अब इस अमूर्तता को बच्चे के साथ कैसे बाँटना है कि वो उसके लिए मूर्त बन जाए। मूर्त बनाने का अर्थ ये नहीं है कि A के लिए apple दिखा दें और B के लिए banana दिखा दीजिए। मूर्तता का मतलब है कि वो A, B या C के साथ जुड़ी अवधारणा को समझ पाए। और उसके लिए वो एक ठोस अवधारणा हो जाए जिसको वह इस्तेमाल कर सकता है। कई बार कक्षा में हम लोग ये भी कहते हैं कि आप 3A और 4B नहीं जोड़ सकते, क्या केले और सेबों को जोड़ा जाता है? तो आपने यहाँ पर अपनी तरफ़ से एक मॉडल बना दिया A और B के लिए सेब और केले का, और आपको लगा कि आपने ये बच्चे को अच्छा सिद्धान्त समझा दिया कि 3A और 4B को नहीं जोड़ सकते। लेकिन ये जो 3A और 4B हैं, ये apple और banana नहीं हैं क्योंकि A और B तो कुछ भी हो सकते हैं। मॉडल का, मूर्तता का इस्तेमाल ध्यान से होना चाहिए और बच्चों का उस समय जो अमूर्तता का स्तर है उस स्तर के आगे जाने का प्रयास होना चाहिए न कि उनको पीछे घसीटने का। अकसर मॉडल और मूर्त चीज़ों के इस्तेमाल से हम बच्चों की क्षमता को, बच्चे की समझ को कम आँक कर उसको पीछे घसीटने का प्रपंच करते हैं।

> गाँधीजी ने भी कहा था, “आप भाषा और गणित अच्छे–से पढ़ा दें, बाक़ी ज्ञान तो बच्चा ख़ुद हासिल कर लेगा।” उस तरह की क्षमता आने के लिए जिस तरह के संख्या–ज्ञान की हम बात कर रहे हैं उसकी कल्पना हमें करनी पड़ेगी, उसको अंक सिखाने, गिनती या क्रम सिखाने से जोड़ना उचित नहीं होगा।

कुछ बात शब्दावली के बारे में। गणित में दिखाना, बताना, समझाना शब्द इस्तेमाल नहीं करना चाहिए क्योंकि ये गणित या कुछ भी सीखने के लिए उपयोगी नहीं हैं। सीखने के लिए उपयोगी पद (terms) हैं– खोजने का प्रयास करना, देखने का, पहचानने, हल करने, सिद्ध करने, सिद्धान्त ढूँढ़ने, नियम बनाने का प्रयास करना। गणित सीखने की प्रक्रिया में ज़्यादा महत्त्वपूर्ण यह है कि बच्चा प्रयास करे और यह प्रयास इस ढंग से रचित करे कि उसमें वो स्वयं कुछ कर पाए और उस पूरी प्रक्रिया में योगदान दे पाए।

राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 में बुनियादी साक्षरता और संख्या–ज्ञान (Foundational Literacy and Numeracy) की बात की गई है। उसपर ज़्यादा विस्तार से सोचने की ज़रूरत है। बुनियादी साक्षरता और बुनियादी संख्या–ज्ञान का मसला अंक पहचान और गिनती गिनना नहीं है। उनके दिमाग़ में जो बुनियादी संख्या–ज्ञान का मसला है, उसमें पूरा वृहद् गणित शामिल है, जिसमें गिन पाना, जोड़ पाना, घटा पाना, गुणा कर पाना, उसका ज़िन्दगी में उपयोग कर पाना, परिस्थितियों में कौन–सा गणित इस्तेमाल करना है, कैसे करना है, उसको समझ पाना, ये देख पाना कि कौन–से आँकड़े उपयोगी हैं कौन–से नहीं, आँकड़ों का इकट्ठा कर उनका विश्लेषण कर पाना, आकारों की समझ बना पाना, उनमें सम्मति देख पाना, उनमें सर्वांगसमता देख पाना, और ये देख पाना कि कौन–सी चीज़ें किस जगह में कितनी आ सकती हैं? कैसे किसी जगह का बेहतर उपयोग हो सकता है? कैसे उसको घुमा–फिरा

कर बेहतर आकृति बन सकती है? ये सब चीज़ें बुनियादी संख्या-ज्ञान में शामिल हैं जिसमें एक गणित का पूरा अन्वेषण (exploration) का ढाँचा है और उसमें कुछ बुनियादी क्षमताएँ हैं जिनको हमें नियमित करना पड़ेगा और चूँकि हम संख्या-ज्ञान की बात कर रहे हैं तो ये सबसे महत्त्वपूर्ण होगा कि वो जो भी सीखे उसका अपने जीवन में उपयोग कर सके, औरों को समझा सके, नई जगहों पर इस्तेमाल कर सके। ऐसा न हो वो सिर्फ़ नियमों को याद करने, दोहराने में उलझ जाए और साक्षरता का भी यही अर्थ है कि जो उसने पढ़ा है उसको समझा पाए, इस्तेमाल कर पाए और कोई भी नई चीज़ है उसको पढ़ पाए। तो बुनियादी साक्षरता, बुनियादी संख्या-ज्ञान का मतलब यही है जिसके ऊपर आगे की इमारत खड़ी हो सके। वो सारा गणित, सारी भाषा की समझ और क्षमताएँ जिनके ऊपर आगे की भाषा, गणित और बाक़ी सब ज्ञान की नींव हो और जिसके ऊपर पूरी इमारत खड़ी हो सके। यह सोचना पड़ेगा कि इसमें क्या-क्या आएगा और उसको सीमित करने से नीति का मक़सद है वो पूरा नहीं होगा। जैसा कि नई तालीम के समय गाँधीजी ने भी कहा था, "आप भाषा और गणित अच्छे-से पढ़ा दें, बाक़ी ज्ञान तो बच्चा ख़ुद हासिल कर लेगा।" उस तरह की क्षमता आने के लिए जिस तरह के संख्या-ज्ञान की हम बात कर रहे हैं उसकी कल्पना हमें करनी पड़ेगी, उसको अंक सिखाने, गिनती या क्रम सिखाने से जोड़ना उचित नहीं होगा।

हृदय कान्त दीवान शिक्षा के क्षेत्र में पिछले चार दशक से कार्य कर रहे हैं। वे राज्य के शिक्षकीय ढाँचों में शैक्षिक नवाचार और परिवर्तन के प्रयासों से सम्बद्ध रहे हैं। एकलव्य के फ़ाउण्डिंग सदस्य रहे हैं। वर्तमान में अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय के अनुवाद पहल कार्यक्रम से जुड़े हैं।

सम्पर्क : hardy@azimpremjifoundation.org